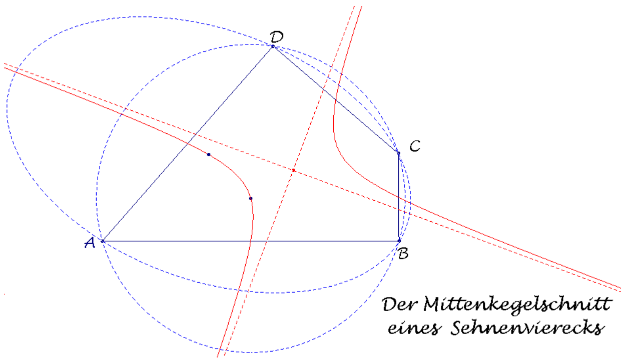
Der Mittenkegelschnitt eines Sehnenvierecks

Eckart Schmidt

Bekanntlich legen fünf Punkte einen Kegelschnitt fest, Kegelschnitte durch vier Punkte haben ihre Zentren auf einem sogenannten Mittenkegelschnitt. Dieser Mittenkegelschnitt und sein geometrisches Umfeld werden hier für vier konzyklische Punkte untersucht, deren Umkreis schon ein spezieller Umkegelschnitt ist. Gearbeitet wird in kartesischen Koordinaten, das Koordinatensystem ist auf die geometrischen Zusammenhänge zugeschnitten. Auch wenn die Ergebnisse analytisch noch ansprechbar dargestellt werden können, so lassen sich die Berechnungen – insbesondere die trigonometrischen Umformungen – nur PC-gestützt bewältigen.



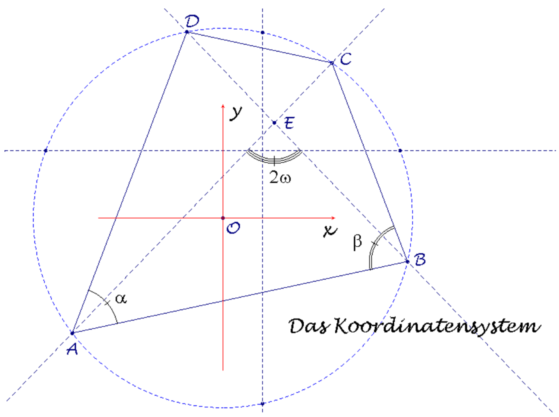
Der Mittenkegelschnitt eines Sehnenvierecks

Das benutzte Koordinatensystem

Vier Punkte auf einem Kreis, der hier ein Einheitskreis mit Mittelpunkt O sein möge, lassen sich als die Ecken eines konvexen Sehnenvierecks $ABCD$ ansprechen. Das Sehnenviereck wird durch die Innenwinkel α und β sowie den halben Diagonalenwinkel ω mit $2\omega = \angle AEB$ beschrieben, wobei E den Diagonalenschnitt bezeichnet. Dabei seien die Bezeichnungen so gewählt, dass $\alpha \le \beta \le 90°$ ist.

Den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems legt man vorteilhaft in den Mittelpunkt O des Umkreises. Zwei auf das Sehnenviereck bezogene orthogonale Richtungen erhält man, wenn man zu den Bogenmitten auf dem Umkreis die Diagonalen des Bogenmittenvierecks betrachtet. Deren Parallelen durch die Umkreismitte seien die Achsen des hier benutzten kartesischen Koordinatensystems. Dann erhalten die Ecken des Sehnenvierecks folgende Koordinaten:

$$A(-\cos(\beta-\omega);-\sin(\beta-\omega)),\quad B(\cos(\alpha-\omega);-\sin(\alpha-\omega)),$$
$$C(-\cos(\beta+\omega);\sin(\beta+\omega)),\quad D(\cos(\alpha+\omega);\sin(\alpha+\omega)).$$



In diesem Koordinatensystem errechnet sich z.B. der Diagonalenschnitt E zu

$$E\left(\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{2\cos\omega};\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2\sin\omega}\right).$$

Da weiterhin der Schwerpunkt $S(x_S;y_S)$ des Sehnenvierecks von Bedeutung sein wird, seien seine Koordinaten hier schon angegeben:

$$x_S=\frac{(\cos\alpha-\cos\beta)\cos\omega}{2},\quad y_S=\frac{(\cos\alpha+\cos\beta)\sin\omega}{2}.$$

Der Mittenkegelschnitt

Es sollen nun Umkegelschnitte des Sehnenvierecks durch einen variablen fünften Punkt $P(x_P;y_P)$ betrachtet werden. Aus den Gleichungen dieser Kegelschnitte lassen sich die Zentren ablesen und damit ihre Ortslinie bestimmen.
Die Gleichung eines Kegelschnitts durch die fünf Punkte A, B, C, D, P bestimmt man am vorteilhaftesten durch Nullsetzen der folgenden Determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 & x_Ay_A & y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 & x_By_B & y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 & x_Cy_C & y_C^2 & x_C & y_C & 1 \\ x_D^2 & x_Dy_D & y_D^2 & x_D & y_D & 1 \\ x_P^2 & x_Py_P & y_P^2 & x_P & y_P & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Um die Gleichung möglichst übersichtlich anzugeben, sei neben den Koordinaten des Schwerpunktes eine weitere Größe des Sehnenvierecks benutzt:

$$const=2\cos\alpha\cos\beta-\cos 2\omega.$$

Leider konnte dieser Konstanten keine geometrische Deutung gegeben werden. Damit lässt sich die Gleichung für den Umkegelschnitt wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} &x^2(-1+2y_P^2+4x_Px_S-4y_Py_S+const)-4x(-1+x_P^2+y_P^2)x_S \\ &+y^2(1-2x_P^2+4x_Px_S-4y_Py_S+const)-4y(1-x_P^2-y_P^2)y_S \\ &+x_P^2-y_P^2-4x_Px_S+4y_Py_S-(x_P^2+y_P^2)const=0. \end{aligned}$$

Auch wenn von diesem Umkegelschnitt nur das Zentrum für den Mittenkegelschnitt von Interesse ist, verrät der Aufbau der Gleichung, dass die Achsen aller Umkegelschnitte parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Satz 1: Die Achsen der Umkegelschnitte eines konvexen Sehnenvierecks verlaufen parallel zu den Diagonalen des Bogenmittenvierecks.

Aus der obigen Gleichung ergeben sich für das Zentrum $Z(x_Z;y_Z)$ des Umkegelschnitts die Koordinaten:

$$x_Z = \frac{2x_S(1-x_P^2-y_P^2)}{1-2y_P^2-4x_Px_S+4y_Py_S-const},$$

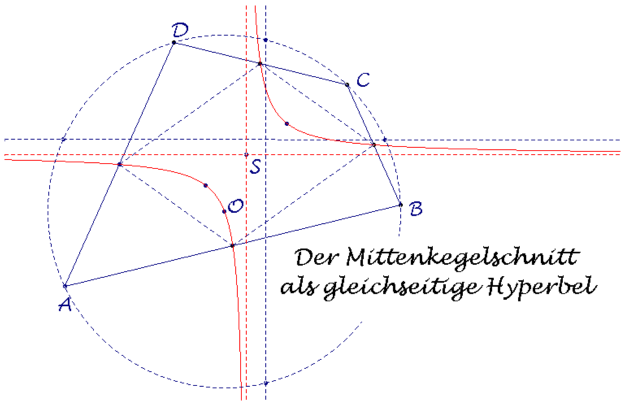
$$y_Z = \frac{2y_S(1-x_P^2-y_P^2)}{1-2x_P^2+4x_Px_S-4y_Py_S+const}.$$

Eliminiert man die Koordinaten des variablen fünften Punktes, so erhält man eine verblüffend einfache Gleichung des Mittenkegelschnitts:

$$x\,y - x\,x_S - y\,y_S = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich mit dem folgenden Satz interpretieren:

Satz 2: Der Mittenkegelschnitt eines konvexen Sehnenvierecks ist eine gleichseitige Hyperbel durch die Umkreismitte mit Zentrum im Schwerpunkt und Asymptoten parallel zu den Bogenmittendiagonalen des Sehnenvierecks.



Spezielle Punkte des Mittenkegelschnitts sind die Seiten- und Diagonalenmitten, daher kann der obige Satz auch wie folgt formuliert werden:

Satz 3: Der Mittenkegelschnitt eines konvexen Sehnenvierecks ist die gleichseitige Umhyperbel des Seitenmittenparallelogramms.

Spezielle Umkegelschnitte

Hier sollen einige Umkegelschnitte angesprochen werden, deren Zentren spezielle Punkte der gleichseitigen Mittenhyperbel sind.

(a) Der Umkreis eines Sehnenvierecks ist ein Umkegelschnitt und die Umkreismitte ein Punkt der Mittenhyperbel.

(b) Die Diagonalen und die Gegenseitenpaare können als entartete Umkegelschnitte betrachtet werden. Daher sind der Diagonalenschnitt E (s.o.) und die Gegenseitenschnitte

$$F(-\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\omega}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}};\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\omega}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}),$$

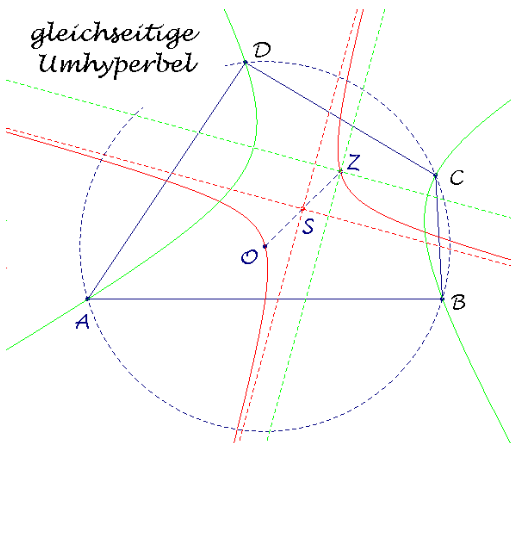
$$G(-\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\omega}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}};\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\omega}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}})$$

Punkte der Mittenhyperbel. Der Mittenkegelschnitt eines Sehnenvierecks ist damit eine gleichseitige Umhyperbel des Diagonaldreiecks EFG. Ergänzt sei, dass das Diagonaldreieck selbstpolar bzgl. aller Umkegelschnitte ist, d.h. dass jede Ecke Pol der Gegenseite ist.

(c) Unter den Umkegelschnitten des Sehnenvierecks gibt es eine gleichseitige Hyperbel, auf der auch die Höhenschnitte der Teildreiecke ABC, BCD, CDA, DAB liegen. Aus ihrer Gleichung

$$(x-2x_S)^2-(y-2y_S)^2-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos 2\omega=0$$

entnimmt man, dass die Spiegelung der Umkreismitte am Schwerpunkt das Zentrum auf der Mittenhyperbel ergibt.

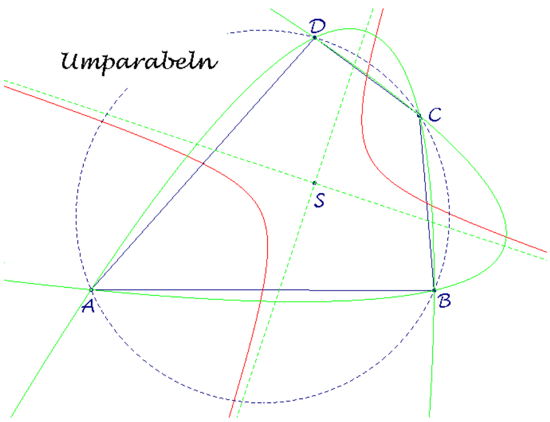


(d) Weitere Umkegelschnitte sind die beiden Umparabeln. Die Gleichungen ergeben sich zu

$$(y-y_S)^2=-2x_S\left(x-\frac{1+2y_S^2-const}{4x_S}\right),$$

$$(x-x_S)^2=-2y_S\left(y-\frac{1+2x_S^2+const}{4y_S}\right).$$

Ihre „Zentren“ liegen in den Fernpunkten der Mittenhyperbel, somit schneiden sich die Achsen der Umparabeln im Schwerpunkt des Sehnenvierecks.



Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de